

Filiations radioactives

C'est le mathématicien britannique H. Bateman qui le premier a effectué ce calcul dès 1910.

On pose n l'ordre de la filiation (père $n = 0$, fils $n = 1$, petit-fils $n = 2 \dots$), λ_n la constante radioactive de l'élément n , $T_n = 0,693 / \lambda_n$ sa période, $x_n(t)$ et $a_n(t)$ le nombre de noyaux et l'activité au temps t de l'élément n .

L'activité au temps t est définie par : $a_n(t) = \lambda_n \cdot x_n(t)$.

Au temps $t = 0$, on suppose que $q_0 = A\lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0)$, $q_1 = -q_0$

Nombre de noyaux de l'espèce $(n - 1)$ qui deviennent des noyaux n pendant dt : $dn' = \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1} \cdot dt$

Nombre de noyaux de l'espèce n qui disparaissent pendant dt : $dn = \lambda_n \cdot x_n \cdot dt$.

Variation du nombre de noyaux de l'espèce n pendant dt : $dn_x(t) = \frac{dx_n(t)}{dt} dt = (\lambda_{n-1} \cdot x_{n-1} - \lambda_n \cdot x_n) \cdot dt$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1}(t) - \lambda_n \cdot x_n(t) \Rightarrow x'_n(t) + \lambda_n \cdot x_n(t) = \lambda_{n-1} \cdot x_{n-1}(t) \Rightarrow a'_n(t) + \lambda_n \cdot a_n(t) = \lambda_n \cdot a_{n-1}(t)$$

On obtient l'équation différentielle des activités : $a'_n(t) + \lambda_n \cdot a_n(t) = \lambda_n \cdot a_{n-1}(t)$. (1)

Les équations reliant les activités et leurs dérivées sont des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants dont la solution est une somme d'exponentielles.

Filiation simple (le père n 'a pas d'ancêtre) : $a'_n(t) + \lambda_n \cdot a_n(t) = 0$

Le nombre de noyaux pères diminue selon la loi $a_0(t) = A \cdot \exp(-\lambda_0 t)$.

Si $a_{n-1}(t) = p_0 \cdot \exp(-\lambda_0 t) + p_1 \cdot \exp(-\lambda_1 t) + \dots + p_{n-1} \cdot \exp(-\lambda_{n-1} t)$

On constate que la relation $a_n(t) = q_0 \cdot \exp(-\lambda_0 t) + q_1 \cdot \exp(-\lambda_1 t) + \dots + q_{n-1} \cdot \exp(-\lambda_{n-1} t) + q_n \cdot \exp(-\lambda_n t)$

vérifie aussi l'équation si l'on prend $q_i = p_i \lambda_n / (\lambda_n - \lambda_i)$ pour $i = 0$ à $i = n - 1$.

q_n est obtenu à partir de la condition initiale $a_n(0) = 0$ $q_n = -(q_0 + q_1 + \dots + q_{n-1})$

Cas $n = 1$.

$a_0(t) = A \cdot \exp(-\lambda_0 t)$ et $q_0 = A\lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0)$, $q_1 = -q_0$ soit $a_1(t) = A \cdot \lambda_1 \cdot [\exp(-\lambda_0 t) - \exp(-\lambda_1 t)] / (\lambda_1 - \lambda_0)$

Cas $n = 2$.

Du cas $n = 1$, on tire $p_0 = A\lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_0)$ et $p_1 = A\lambda_1 / (\lambda_0 - \lambda_1)$

$q_0 = p_0 \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_0) = A\lambda_1 \lambda_2 / [(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_0)]$ $q_1 = p_1 \lambda_2 / (\lambda_2 - \lambda_1) = A\lambda_1 \lambda_2 / [(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_1)]$

De $q_2 = -(q_0 - q_1)$ il vient $q_2 = A\lambda_1 \lambda_2 / [(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1)]$

$a_2(t) = A\lambda_1 \lambda_2 (\exp(-\lambda_0 t) / ((\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_0)) + \exp(-\lambda_1 t) / ((\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_1)) + \exp(-\lambda_2 t) / ((\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)))$

Cas $n = 3$.

$$q_0 = A\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / ((\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_0))$$

$$q_1 = A\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / ((\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_0 - \lambda_1))$$

$$q_2 = A\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / ((\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_0))$$

$$q_3 = A\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 / ((\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_3))$$

Si le calcul est plus simple avec les activités, on étudie en général le nombre de noyaux.

Il suffit d'utiliser $a_n(t) = \lambda_n \cdot x_n(t)$ pour passer de l'un à l'autre.